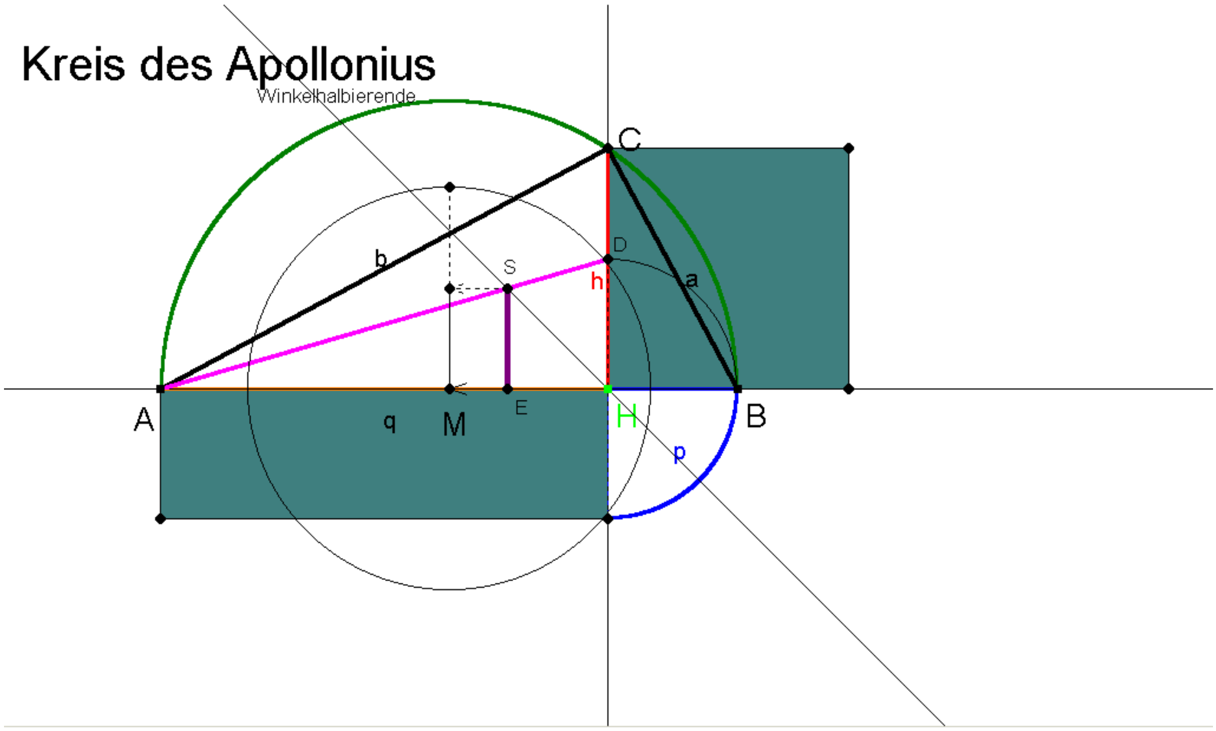
Beweis zur Behauptung zur Konstruktion des harmonischen Mittels



<u>Behauptung</u>: Die Strecke ES ist entspricht dem halben harmonischen Mittel!

<u>Voraussetzung</u>:	$\overline{HD} = \overline{HB}$ durch Konstruktion mit Zirkel Die „Winkelhalbierende“ halbiert den Winkel AHD Durch die Strecke $\overline{AD}$ entsteht das rechtwinklige Dreieck AHD mit den Katheten p und q.

Als Folge dieser Konstruktion schneidet die Winkelhalbierende die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks in S. Durch Fällen des Lots von S auf q entsteht der Punkt E.

Daraus ergeben sich zwei Behauptungen:

1. Die Strecke HS ist die Diagonale eines in das rechtwinklige Dreieck einbeschriebenen Quadrats mit der Seitenlänge ES.
2. Die Dreiecke AHD und AES sind ähnlich.

Zu 1: Durch die Konstruktion gilt:

$$\blacktriangle AES = 90°$$
$$\blacktriangle HES = 90° \qquad \text{(Winkelsumme im Dreieck)}$$
$$\angle EHS = 45° \Rightarrow \angle HSE = 45°$$

Damit ist das Dreieck HES gleichschenklig und es gilt: $|\overline{ES}| = |\overline{EH}|$.

Damit entspricht das Dreieck HES einem halben Quadrat mit der Hypotenuse HS, das sich in das rechtwinklige Dreieck AHD einbeschreiben lässt.

Zu 2: Durch das Fällen des Lotes auf die Kathete q ist die Strecke ES parallel zu HD. Ferner haben sie einen gemeinsamen Winkel am Punkt A. Somit gilt:

Das Dreieck AHD ist ähnlich zum Dreieck AES

□

<u>Satz</u>: **In zwei ähnlichen Dreiecken sind die Verhältnisse der Seiten gleich**.

Damit lässt sich folgende Verhältnisgleichung aufstellen: $\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{ES}|} = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{HD}|}$

Da aber die Länge der Strecke AH = q ist und die Länge der Strecke HD = p ist und die Länge der Strecke ES gleichlang mit der Länge der Strecke EH ist, lässt sich diese Gleichung wie folgt darstellen:

Sei $|\overline{ES}| := x$

$$
\begin{aligned}
\frac{q-x}{x} &= \frac{q}{p} \\
pq - px &= qx \\
pq &= qx + px \\
pq &= x(q+p) \\
\frac{pq}{(p+q)} &= x = \overline{EH}
\end{aligned}
$$

Da für das harmonische Mittel gilt: $H = \frac{2pq}{(p+q)}$ entspricht x genau dem halben harmonischen Mittel!

q.e.d

<u>**Anmerkung von Wilfried Dutkowski:**</u>
Missverständlich bleibt dabei jedoch die Formulierung der Überschrift: „Kreis des Apollonius", denn dazu wird in diesem Beweis kein Bezug genommen. Die Konstruktion des harmonischen Mittels in dieser Zeichnung lässt sich nicht mit dem Kreis des Apollonius erklären.