Mathematik
4. Semester

W. Dutkowski

Das Kugelvolumen als Mittelwert

Von Zylinder- und Doppelkegelvolumen

Kegel und Zylinder

Die Abbildung zeigt drei Objekte:

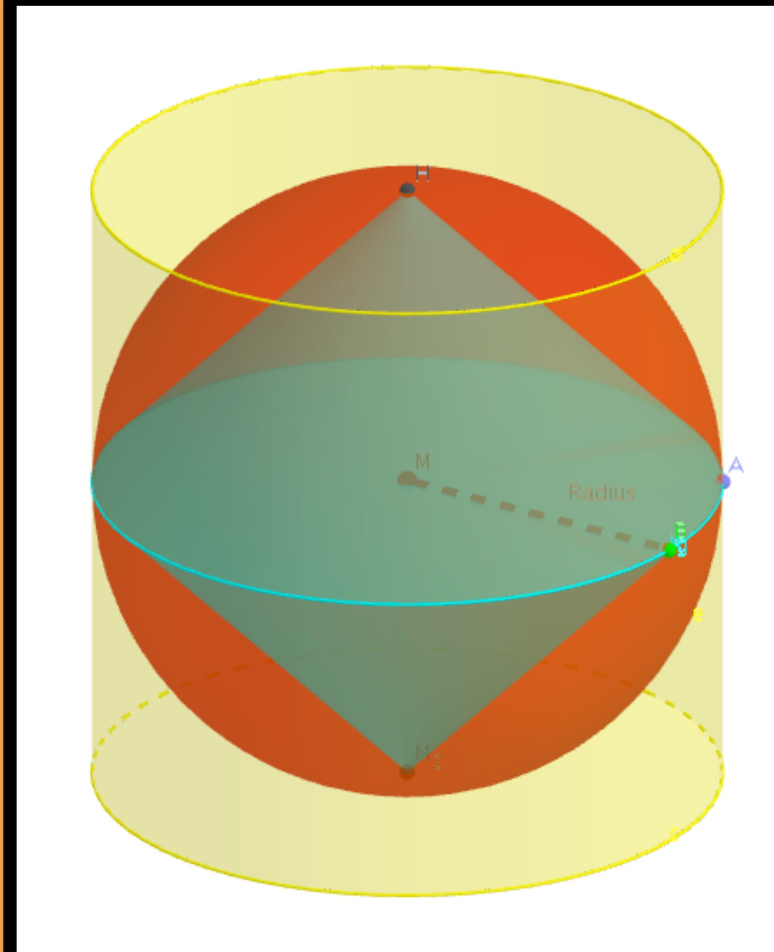
1. Eine Kugel
2. Einen Zylinder
3. Einen Doppelkegel

Die Zeichnung ist so angelegt, dass der Radius des Doppelkegels genauso groß ist, wie der Radius der Kugel und der Radius des Zylinders.

Da die Kugel im Zylinder eingeschlossen ist, gilt für die Höhe des Zylinders: 2r (der Kugel)

Und für die Höhe des Doppelkegels ebenfalls: 2r (der Kugel)

Sowie r der Kugel für die Grundfläche des Kegels.



Volumenabschätzung Zylinder-Doppelkegelvolumen

Wie in der Abbildung ersichtlich gilt folgende Ungleichung für die Volumina V:

$$V_{DK} < V_{K} < V_{Z}$$

(DK = Doppelkegel, K = Kugel, Z = Zylinder)

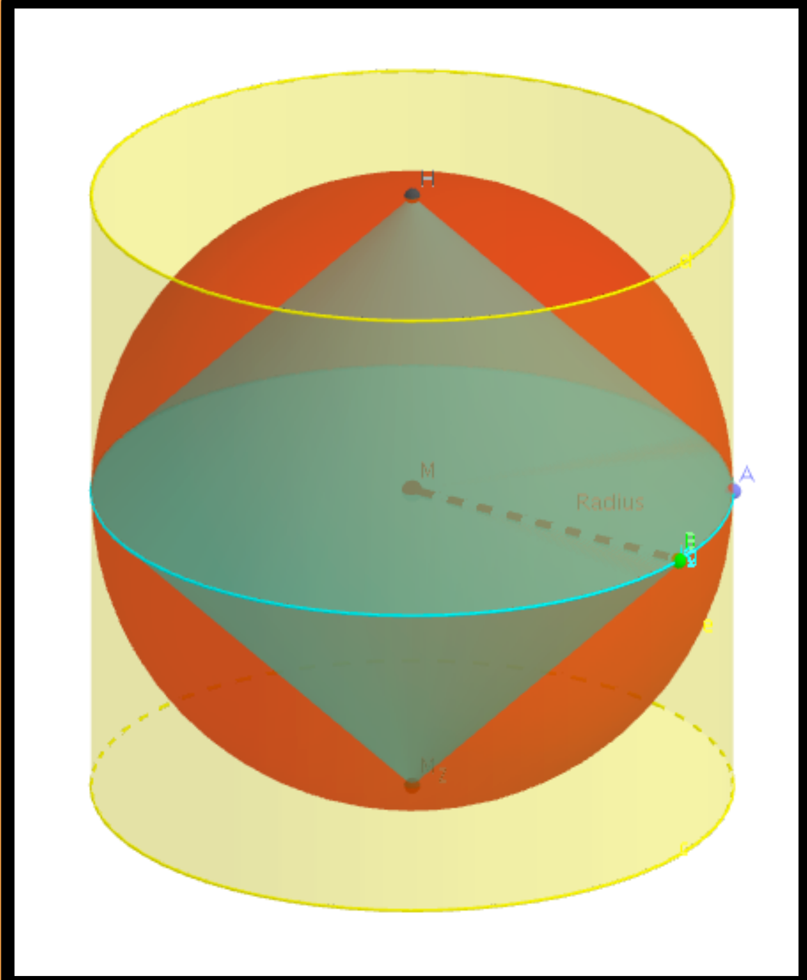
Für das Volumen eines Zylinders gilt:

$$V = r^2\pi h$$

Volumen | Berechnungsterm

Da gilt: $h = 2r$,
verändert sich die Gleichung zu:

$$V = 2r^3\pi$$



Wilfried Dutkowski
Mathematik dynamisch

Kegelvolumen

Für das Volumen eines Kegels gilt:
(Spitzkörper der Säule: hier Zylinder)

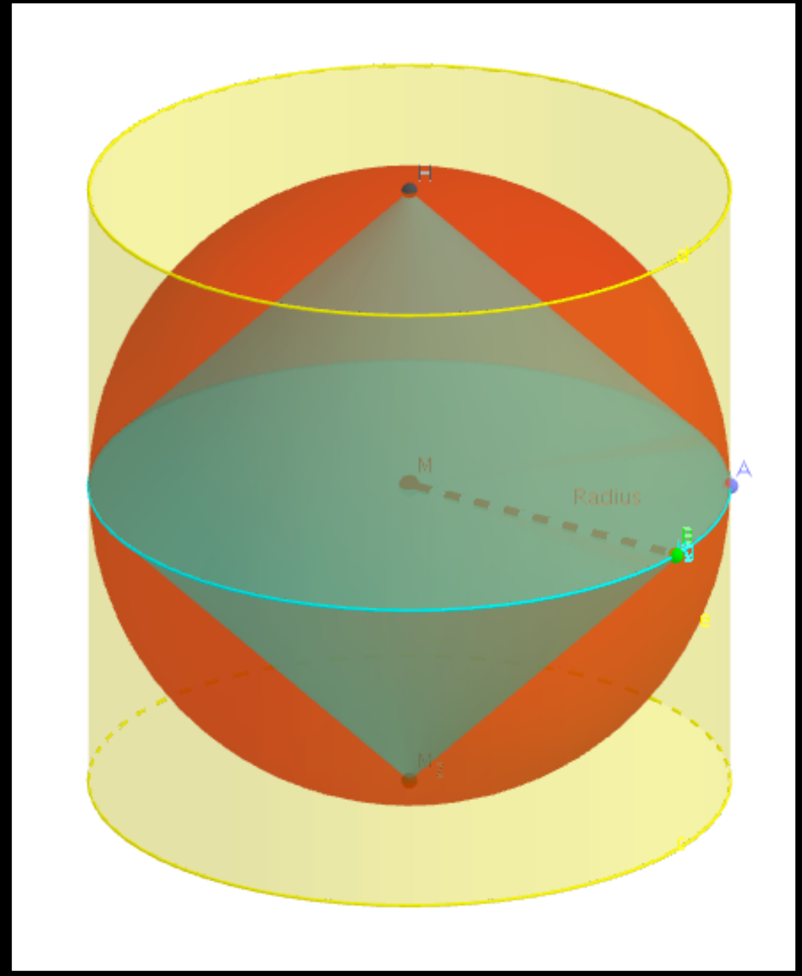
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

Da gilt: h = r,
verändert sich die Gleichung zu:

$$V = \frac{1}{3} r^3 \pi$$

Da es sich um einen Doppelkegel handelt, mit 2 multiplizieren.

$$2\,V = \frac{2}{3} r^3 \pi$$



Wilfried Dutkowski

Mathematik dynamisch

Abschätzung mit Termen

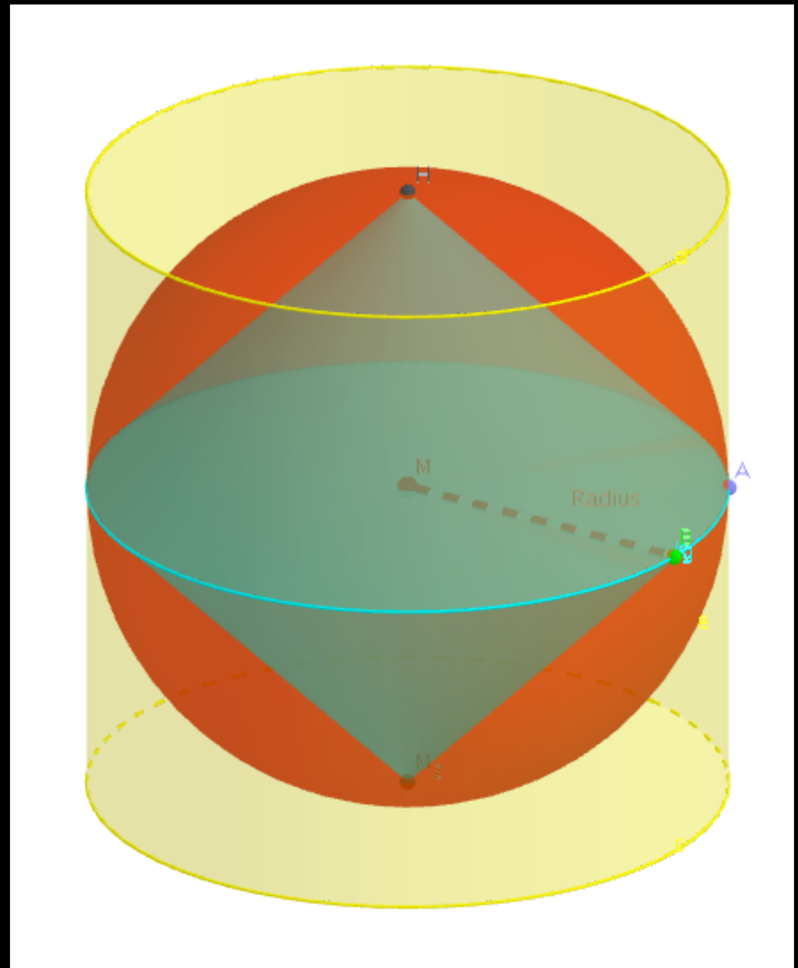
Wie in der Abbildung ersichtlich gilt folgende Ungleichung für die Volumina V:

$$V_{DK} < V_K < V_Z$$

(DK = Doppelkegel, K = Kugel, Z = Zylinder)

Mit Volumentermen erhält man:

$$\frac{2}{3} r^3\pi < V_K < 2r^3\pi$$



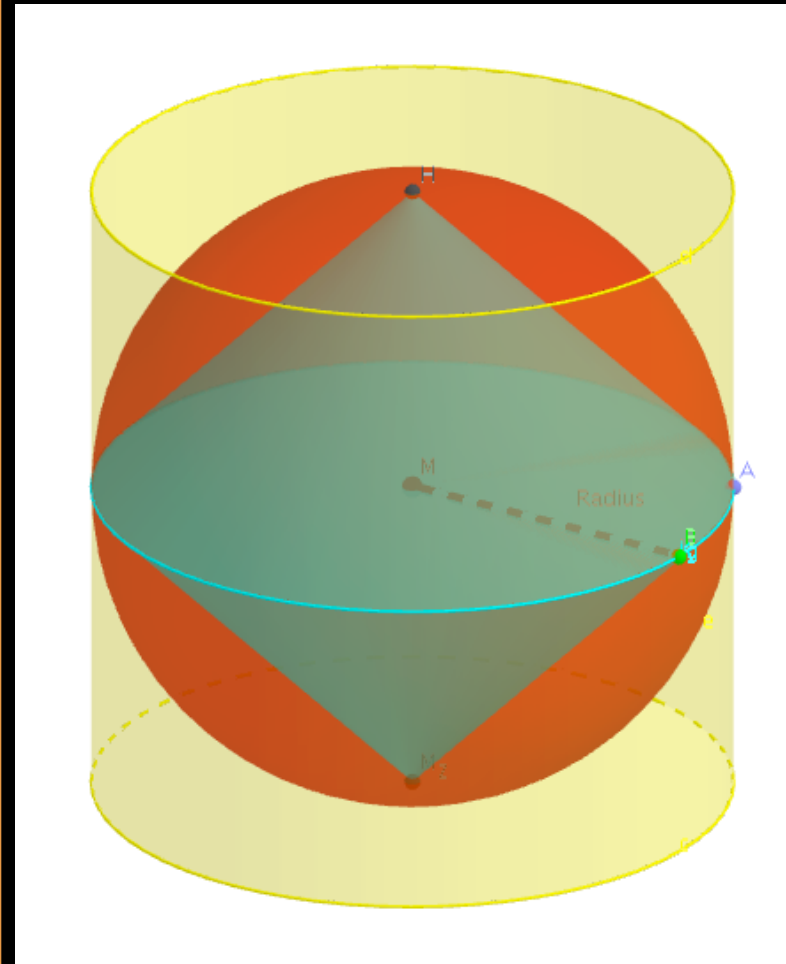
Arithmetischer Mittelwert

Das arithmetische Mittel wird berechnet durch:

$$\bar{m} = \frac{Summe\ aller\ Werte}{Anzahl\ der\ Werte}$$

$$\bar{m} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3 + 2\pi r^3}{2}$$

Da Brüche nur addiert werden können, wenn sie den gleichen Nenner haben, muss der Term für den Zylinder mit 3 erweitert werden.



Arithmetischer Mittelwert

Man erhält:

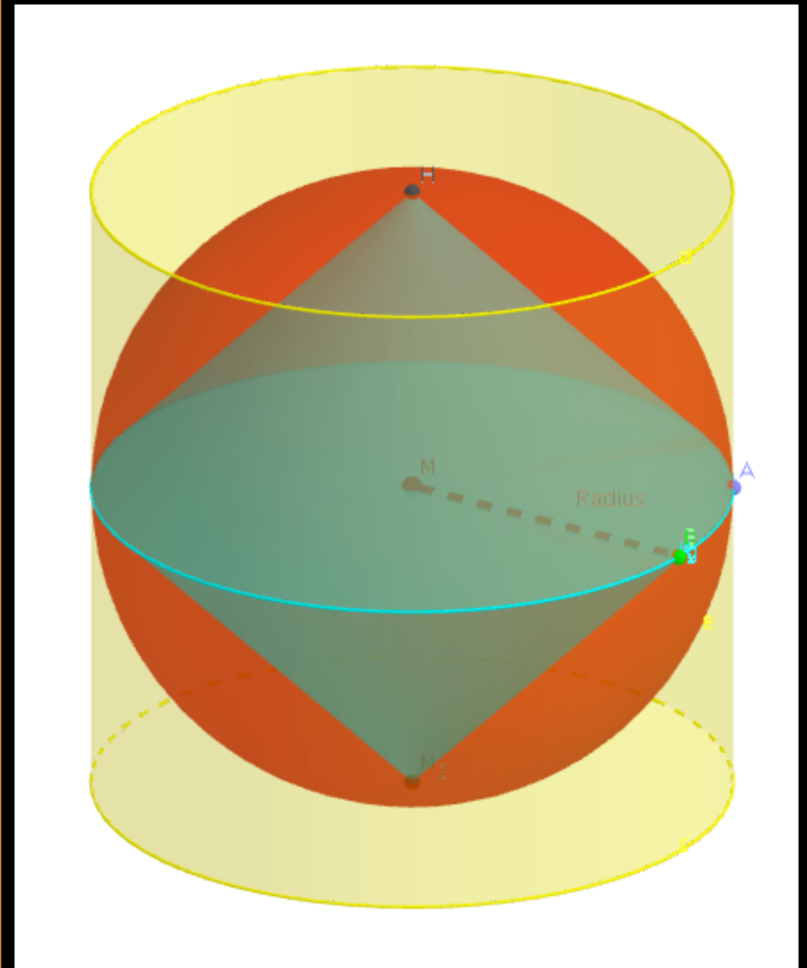
$$\bar{m} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{6}{3}\pi r^3}{2}$$

also:

$$\bar{m} = \frac{\frac{8}{3}\pi r^3}{2}$$

Division eines Bruches durch Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ergibt:

$$\bar{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = V_K$$



Wilfried Dutkowski
Mathematik dynamisch

Das Kugelvolumen

Wie in der Abbildung ersichtlich gilt folgende Ungleichung für die Volumina V:

$$V_{DK} < V_K < V_Z$$

(DK = Doppelkegel, K = Kugel, Z = Zylinder)

Mit Volumentermen erhält man:

$$\frac{2}{3} r^3\pi < \frac{4}{3}\pi r^3 < 2r^3\pi$$

Diese Formel für das Kugelvolumen

finden Sie in Ihrer Formelsammlung.